Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria

Sulla convergenza puntuale e uniforme delle serie di Fourier

Si consideri la funzione $F(x)$ periodica di periodo 2π che nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ è pari a $f(x)=x$ e se ne faccia la serie di Fourier. Si ottiene $S(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-)^{k+1}\sin(kx)}{k}$ e inoltre indichiamo $S_n(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-)^{k+1}\sin(kx)}{k}$. Sappiamo dalla teoria della convergenza puntuale, che la serie converge per ogni valore di x. Se $x=k\pi$ con $k\neq 0$ la serie converge al valore 0 (la media del salto) ossia $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=0$. Se $x\neq k\pi$ oppure $x=0$ la serie converge alla funzione $F(x)$ ossia $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=F(x)$. Ricordiamo qui cosa vuol dire convergenza puntuale

$$\forall\ x\in\mathbf{R}\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_{\varepsilon,x}:\ n>n_{\varepsilon,x}\ \Rightarrow\ |F(x)-S_n(x)|<\varepsilon$$

Dal fatto che la serie converge ad una funzione discontinua, segue che la convergenza non può essere uniforme (ed infatti il coefficiente di Fourier tende a zero come $\dfrac{1}{k}$. Se tendesse a zero ad esempio come $\dfrac{1}{k^2}$ allora la convergenza sarebbe uniforme). Dalla teoria della convergenza uniforme, sappiamo che qualora questa sia soddisfatta, allora la funzione che si ottiene eseguendo $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)$ deve essere una funzione continua essendo $S_n(x)$ una funzione continua per ogni valore di n.
Dire invece che la convergenza è uniforme, come è noto, significa che

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_\varepsilon:\ n>n_\varepsilon\ \Rightarrow\ |F(x)-S_n(x)|<\varepsilon\ \forall\ x\in\mathbf{R}$$

ed è equivalente a dire che $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}n_{\varepsilon,x}=M<+\infty$. La nozione di convergenza non uniforme invece è

$$\exists\ \varepsilon>0:\ \forall\ n'\ \exists\ n>n'\ \exists\ x_{\varepsilon,n,}:|F(x_{\varepsilon,n})-S_n(x_{\varepsilon,n})|\geq\varepsilon$$

ed è equivalente a dire che $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}n_{\varepsilon,x}=+\infty$. Inoltre convergenza puntuale ed uniforme possono essere studiate anche su sottoinsiemi di $\mathbf{R}$

Vogliamo ora mostrare che nell'intervallo $(0,\pi)$ la serie precedente non converge uniformemente. Se convergesse uniformemente la stessa cosa avverrebbe nell'insieme $(0,\pi]$ e quindi la serie dovrebbe convergere ad una funzione continua ma sappiamo che questo non è vero. D'altra parte è chiaramente uniforme la convergenza sull'insieme dato dai punti $\{\pi,2\pi,3\pi\}$ (ad esempio). Il motivo per cui nell'insieme $(0,\pi)$ la convergenza non è uniforme, risiede nel fatto che avvicinandosi a π si trovano infiniti punti x il cui $n_{\varepsilon,x}$ tende a $+\infty$. Da un punto di vista matematico, la quantità $n_{\varepsilon,x}$ non è una quantità limitata per $x\in[0,\pi)$. Per dimostrare tale fatto usiamo la formula ($\delta>0$; per la giustificazione della formula si veda dopo)

$$S_n(\pi-\delta)-F(\pi-\delta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(F(\pi-\delta+z)-F(\pi-\delta))\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\delta}(F(\pi-\delta+z)-F(\pi-\delta))\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}(F(\pi-\delta+z)-F(\pi-\delta))\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\delta}z\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}(z-\pi)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz$$

Usiamo il fatto che l'integrando è una quantità dispari e che $\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}=\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kz)$ per scrivere

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} z\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz - \pi\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz + \pi\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz =$
$= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\delta}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz$
Dal fatto che $\sin z = z + O(z^3)$ e prendendo $\delta < 2\pi$ si ha
$\frac{1}{2}\int_0^{\delta}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz = \frac{1}{2}\delta(2n+1) + O(\delta^3(2n+1)^3)$ e quindi

$|S_n(\pi-\delta_n) - F(\pi-\delta_n)| = \left|-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\delta}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz\right| \geq \frac{\pi}{2} - \left|\frac{1}{2}\int_0^{\delta}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz\right| = \frac{\pi}{2} - |\delta(2n+1) + O(\delta^3(2n+1)^3)|$
Se scegliamo la successione $\delta_n = \frac{1}{(2n+1)^2}$, la quantità $|\delta(2n+1) + O(\delta^3(2n+1)^3)|$ tende azero e quindi $|S_n(\pi-\delta_n) - F(\pi-\delta_n)| \geq \frac{1}{4}$ ($\frac{1}{4}$ rappresenta solo un numero minore di $\frac{\pi}{2}$).

Naturalmente $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\int_0^{\delta}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz = \frac{\pi}{2}$ (come deve essere visto che la serie di Fourier converge per ogni valore di x).

La formula $S_n(\pi-\delta) - F(\pi-\delta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(F(\pi-\delta+z) - F(\pi-\delta))\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz$ è tipica nella teoria delle serie di Fourier. Si possono guardare le formule (2–61) e (2–62) del Pagani–Salsa e scrivere $s_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz - \frac{1}{2\pi}f(x)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz$ ossia la formula che cerchiamo. Naturalmente stiamo usando $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz = 1$ e questo segue facilmente dall'identità scritta dopo la (2–61) del Pagani–Salsa.